VESTIBULAR UFRGS 2022
RESOLUÇÃO DA PROVA DE MATEMÁTICA

As resoluções, em vídeos individuais, de todas as questões podem ser visualizadas seguindo o QRCode abaixo

46.)

$$\log\left(1-\frac{1}{2}\right)+\log\left(1-\frac{1}{3}\right)+\ldots+\log\left(1-\frac{1}{1000}\right)$$

$$\log\left(\frac{1}{2}\right)+\log\left(\frac{2}{3}\right)+\ldots+\log\left(\frac{999}{1000}\right)$$

$$\log\left(\frac{1}{2}.\frac{2}{3}.\frac{3}{4}.\frac{4}{5}.\ldots.\frac{999}{1000}\right)$$

$$\log\left(\frac{1}{1000}\right)$$

$$\log\left(\frac{1}{1000}\right)=x$$ (Aplicar a definição)

$$10^x=\frac{1}{1000}$$

$$10^x=0,001\rightarrow$$

Os logaritmos de potências de 10 na base 10 resultam do número de zeros precedido do sinal negativo.

$$10^x = \frac{1}{10^3} \quad \therefore \; 10^x = 10^{-3}$$
$$x = -3$$
(A)

47.)

I - $\sqrt{a^2 + b^2} = a + b$

$$\left(\sqrt{a^2 + b^2}\right)^2 = \left(a + b\right)^2$$
$$a^2 + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$a^2 + b^2 - a^2 - b^2 = 2ab$$
$$2ab = 0$$
$$ab = 0$$
(F)

seria verdadeira se a=0, b=0 ou a=b=0.
Mas não para todos os reais.

Outro formato: (por atribuição)

a = 3 e b = 4

$$\sqrt{3^2 + 4^2} = 3 + 4$$
$$\sqrt{9 + 16} = 7$$
$$\sqrt{25} \neq 7$$

II - $\sqrt{a^2} = a \;\; é \;\; (F), \;\; pois \;\; \sqrt{a^2} = |a| \;\; e \;\; |a| = \pm a$

Outro formato: (por atribuição)

a = 5

$$\sqrt{5^2} = 5 \;\; é \;\; (V)$$

Como as duas primeiras afirmações são falsas, a única alternativa possível é (B).

Ou seja, a III tem que ser (V).

mas para a = -5, temos

$$\sqrt{(-5)^2} = \sqrt{25} = 5 \quad (F)$$

47)

III - $Se \ \ 0 < b < a, \ \ então \ \sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2}.$

$$\left(\sqrt{ab}\right)^2 \le \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$$

$$ab \le \frac{a^2 + 2ab + b^2}{4}$$

$$4ab \le a^2 + 2ab + b^2$$

$$0 \le a^2 + 2ab - 4ab + b^2$$

$$a^2 - 2ab + b^2 \ge 0$$

$\left(a-b\right)^2 \ge 0$ (V)

Como a e b são positivos e a > b, a – b resulta positivo e valor positivo ao quadrado é maior que zero.

ou por atribuição:

a = 8 e b = 2

$$\sqrt{8.2} \le \frac{8+2}{2}.$$

$$\sqrt{16} \le \frac{10}{2}.$$

$$4 \le 5.$$

a = 10 e b = 1

$$\sqrt{10.1} \le \frac{10+1}{2}.$$

$$\sqrt{10} \le \frac{11}{2}.$$

$$3,? \le 5,5.$$

a = 30 e b = 29

$$\sqrt{30.29} \le \frac{30+29}{2}.$$

$$\sqrt{870} \le \frac{59}{2}.$$

$$\frac{59}{2} = 29,5$$

$$\left(29,5\right)^2 = 870,25$$

48)

Resolvendo a equação, obtém-se raízes irracionais. Essas raízes dificultariam a substituição na expressão:

$$x^2 - 6x + 3 = 0$$

$$x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4.1.3}}{2}$$

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 12}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{24}}{2} = \frac{6 \pm 2\sqrt{6}}{2}$$

$$x = \frac{2(3 \pm \sqrt{6})}{2} \ \therefore \ x = 3 \pm \sqrt{6}$$

Por soma e produto das raízes:

$$\left(\frac{1}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \right)^{-2}$$

Operando o denominador:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{b+a}{a.b} = \frac{a+b}{a.b} \ \frac{\to \quad soma}{\to produto}$$

$$soma = -\frac{(-6)}{1} = 6 \quad produto = \frac{3}{1} = 3$$

$$\frac{a+b}{a.b}=\frac{6}{3}=2$$

$$\left(\frac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}\right)^{-2}=\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}=2^{2}=4 \quad (B)$$

49)

$$\log_2 x+\left(\log_2 x\right)^2=12$$

Estabelecendo a mudança de variável:

$$\log_2 x=y$$

$$y+y^2=12$$

$$y^2+y-12=0$$

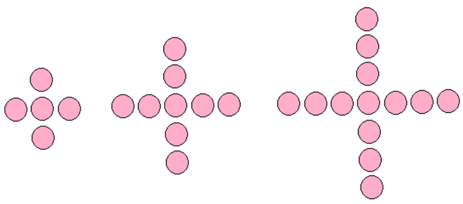
$$Soma=-b=-1 \qquad y_1=-4$$

$$\Pr oduto=c=-12 \qquad y_2=3$$

$$\log_2 x=3 \qquad \log_2 x=-4$$

$$2^3=x_1 \qquad 2^{-4}=x_2$$

$$x_1=8 \qquad x_2=\frac{1}{2^4} \quad x_2=\frac{1}{16} \quad (A)$$

50) 

RESOLUÇÃO 1

PA(5, 9, 13, 17, 21, ... 200ª posição = ?)

$$a_n=a_1+(n-1).r$$

$$a_{200}=a_1+199.r$$

$$a_{200}=5+199.4$$

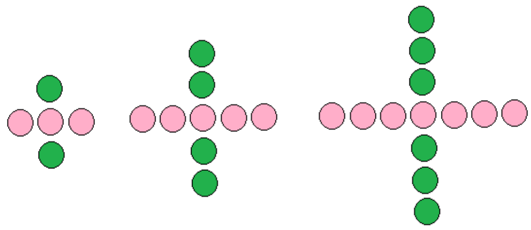
$a_{200} = 5 + 796 \quad a_{200} = 801 \quad (C)$

RESOLUÇÃO 2

$PA(5,9,13,17,21], 25,29,33,37,41],45,49,53,57,61...$

Observa-se que há um padrão na casa das unidades a cada grupo de 5 termos. Os termos que ocupam posições múltiplas de 5, finalizam por “1”. Como 200 é múltiplo de 5, o valor que ocupa essa posição deve ter 1 na casa das unidades. (C).

RESOLUÇÃO 3



ETAPA 1 → 3 + 2 = 5

ETAPA 2 → 5 + 4 = 9

ETAPA 3 → 7 + 6 = 13

Cada etapa resulta da soma dos círculos da linha horizontal central mais o valor com uma unidade a menos.

Calculando a quantidade de círculos na linha central da 200ª etapa:

$$a_{200} = a_1 + 199.r$$

$$a_{200} = 3 + 199.2$$

$$a_{200} = 3 + 398$$

$$a_{200} = 401$$

Total na 200ª etapa = 401 + 400 = 801 (C).

51)

$$sen\,\alpha = \frac{3}{5} \qquad sen(2\alpha) = ?$$

$$sen(2\alpha) = 2.sen\,\alpha.\cos\alpha$$

$$\cos\alpha = ?$$

$$sen^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \cos^2\alpha = 1$$

$$\cos^2\alpha = 1 - \frac{9}{25} = \frac{25-9}{25}$$

$$\cos^2\alpha = \frac{16}{25} \qquad \cos\alpha = \pm\frac{4}{5}$$

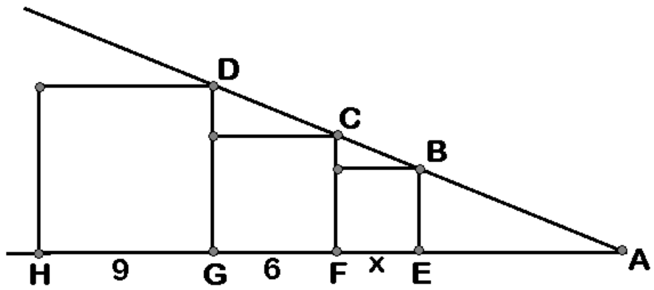
$$como\ \alpha \in 1^o\ quadrante,\ o\ \cos\alpha\ é\ positivo.$$

$$sen(2\alpha) = 2.\frac{3}{5}.\frac{4}{5}$$

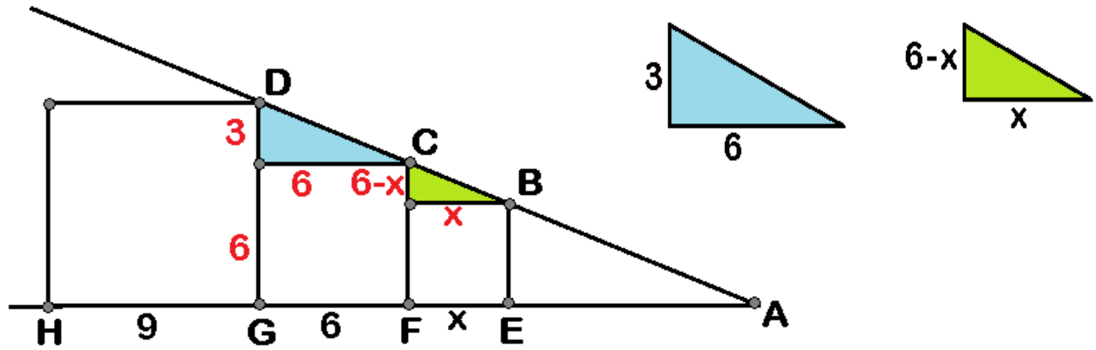
$$sen(2\alpha) = \frac{24}{25} \quad (D)$$

52)

Resolução 1



Por semelhança de triângulos:



$$\frac{6-x}{3} = \frac{x}{6}$$

$$3x = 6(6-x)$$

$$3x = 36 - 6x$$

$$9x = 36$$

$$x = 4$$

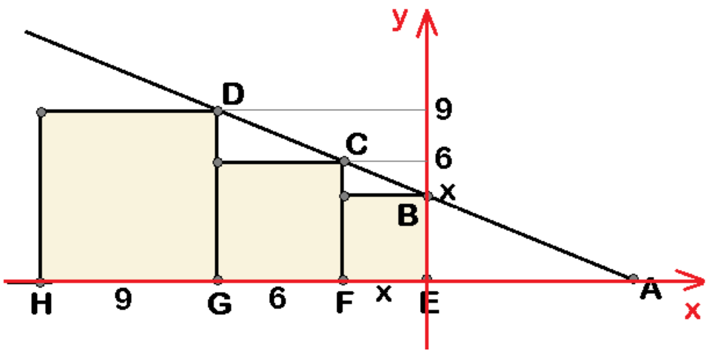
Soma das áreas:

$$S_A = 9^2 + 6^2 + 4^2$$

$$S_A = 81 + 36 + 16$$

$$S_A = 133 \qquad (D)$$

Resolução 2



Os pontos B, C e D estão alinhados.
B(0, x), C(-x, 6) e D(-x-6, 9)

Condição de alinhamento de 3 pontos:

$$\begin{vmatrix} 0 & x \\ -x & 6 \\ -x-6 & 9 \\ 0 & x \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{array}{c} -x^2 \\ -6x-36 \\ 0 \\ \hline -x^2-6x-36 \end{array} \qquad \begin{array}{c} 0 \\ -9x \\ -x^2-6x \\ \hline -x^2-15x \end{array}$$

$$x^2-15x+x^2+6x+36=0$$

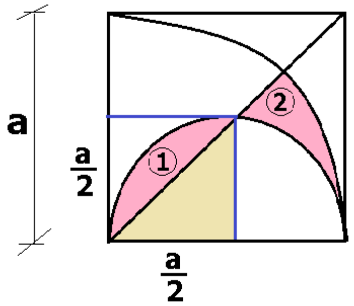
$$-9x+36=0$$

$$-9x=-36$$

$$x=4$$

$$Soma\ das\ áreas:$$
$$S_A = 9^2 + 6^2 + 4^2$$
$$S_A = 81 + 36 + 16$$
$$S_A = 133 \qquad (D)$$

53)



ÁREA 1 → $A_{\text{quarto de círculo}} - A_{\text{triângulo}}$

$$A_{\text{quarto de círculo}} = \frac{\pi.r^2}{4} = \frac{\pi.\left(\frac{a}{2}\right)^2}{4} = \frac{\frac{\pi a^2}{4}}{4} = \frac{\pi a^2}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{\pi a^2}{16}$$

$$A_{\text{triângulo}} = \frac{\frac{a}{2}.\frac{a}{2}}{2} = \frac{\frac{a^2}{4}}{4} = \frac{a^2}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{a^2}{8}$$

$$\text{ÁREA 1} = \frac{\pi a^2}{16} - \frac{a^2}{8} = \frac{\pi a^2 - 2a^2}{16} = \frac{a^2(\pi - 2)}{16}$$

ÁREA 2 → $A_{\text{oitavo de círculo}} - A_{\text{triângulo}} - A_{\text{quarto de círculo}}$

$$A_{\text{oitavo de círculo}} = \frac{\pi.r^2}{8} = \frac{\pi.a^2}{8}$$

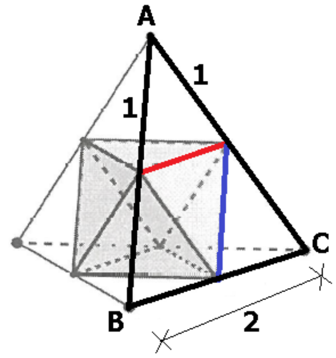
A$_{\text{triângulo}}$ = $\dfrac{a^2}{8}$ A$_{\text{quarto de círculo}}$ = $\dfrac{\pi . a^2}{16}$ $\dfrac{a^2}{8} + \dfrac{\pi . a^2}{16} = \dfrac{2a^2 + \pi a^2}{16}$

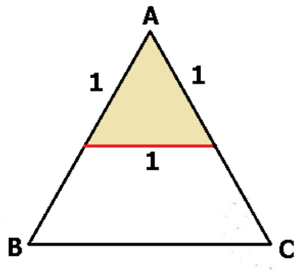
ÁREA 2 = $\dfrac{\pi a^2}{8} - \dfrac{(2a^2 + \pi a^2)}{16} = \dfrac{2\pi a^2 - 2a^2 - \pi a^2}{16} = \dfrac{\pi a^2 - 2a^2}{16}$

ÁREA 2 = $\dfrac{a^2(\pi - 2)}{16}$ ÁREA 1 = ÁREA 2

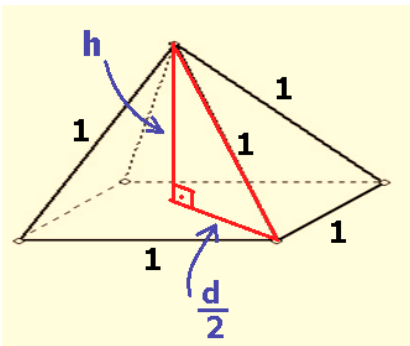
ÁREA TOTAL = $2 \times \dfrac{a^2(\pi - 2)}{16} = \dfrac{a^2(\pi - 2)}{8}$ (E)

54)





Utilizando uma das quatro faces triangulares da pirâmide (ABC), percebe-se que, ao ligar-se os pontos médios de dois lados, constrói-se um triângulo semelhante (portanto equilátero de lado igual a 1). Dessa forma o octaedro regular inscrito possui todas as suas arestas medindo uma unidade. O octaedro pode ser visto como duas pirâmides quadrangulares regulares justapostas pela base. Então o volume do octaedro pode ser calculado pelo dobro do volume da pirâmide.



$V_{PIRÂMIDE} = \dfrac{A_b . h}{3}$ $A_b = \ell^2 = 1^2$ $A_b = 1$

Cálculo da altura:

$$V_{PIRÂMIDE} = \frac{A_b . h}{3}$$

$$V_{PIRÂMIDE} = \frac{1 \times \frac{\sqrt{2}}{2}}{3} = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{3} \quad V_{PIRÂMIDE} = \frac{\sqrt{2}}{6}$$

$$1^2 = \left(\tfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + h^2$$

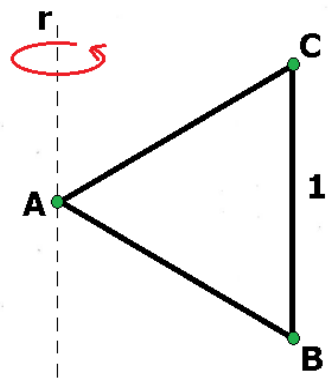
$$1 = \frac{1}{2} + h^2$$

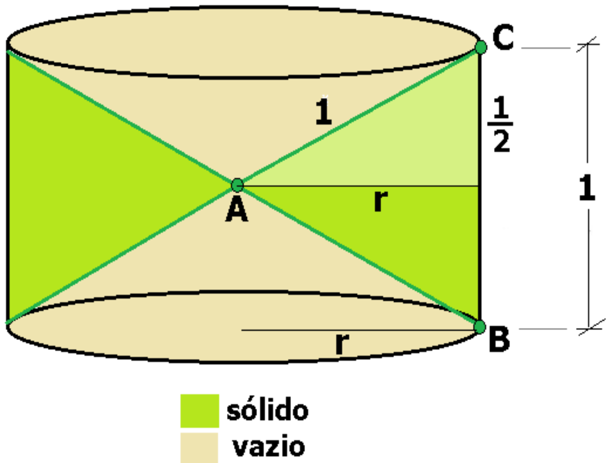
$$h^2 = 1 - \frac{1}{2} \qquad h^2 = \frac{1}{2}$$

$$h = \sqrt{\frac{1}{2}} \qquad h = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$V_{OCTAEDRO} = 2\times\frac{\sqrt{2}}{6} = \frac{\sqrt{2}}{3} \qquad (C)$$

55)

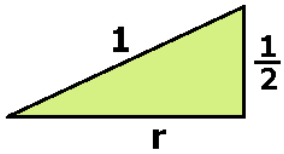




$$V_{SÓLIDO} = V_{CILINDRO} - V_{2CONES}$$

$$V_{CILINDRO} = \pi.r^2.h$$

Cálculo do raio:



$$1^2 = \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 + r^2$$

$$1 - \frac{1}{4} = r^2$$

$$r^2 = \frac{3}{4}$$

$$V_{CILINDRO} = \pi.r^2.h$$

$$V_{CILINDRO} = \pi.\frac{3}{4}.1$$

$$V_{CILINDRO} = \frac{3\pi}{4}$$

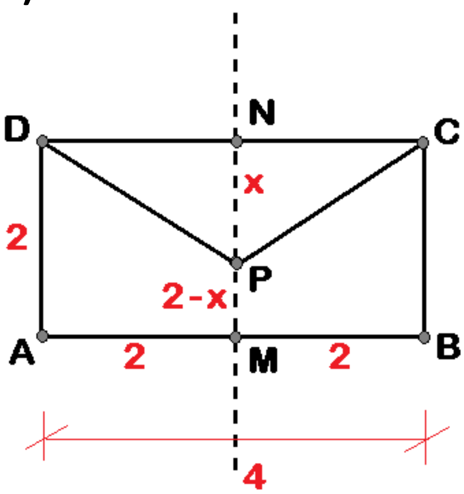
$$V_{CONE} = \frac{\pi.r^2.h}{3}$$

$$V_{CONE} = \frac{\pi.\frac{3}{4}.\frac{1}{2}}{3} = \frac{\pi.\frac{3}{8}}{3}$$

$$V_{CONE} = \frac{\frac{3\pi}{8}}{3} = \frac{3\pi}{8}\times\frac{1}{3} = \frac{\pi}{8}$$

$$V \quad = 2\times\frac{\pi}{\;} = \frac{\pi}{\;}$$

56)



$$S(x) = \overline{PM} + \overline{PD} + \overline{PC} \qquad \overline{PD} = \overline{PC}$$

$$S(x) = (2 - x) + 2.\overline{PD}$$

$$\left(\overline{PD}\right)^2 = 2^2 + x^2$$

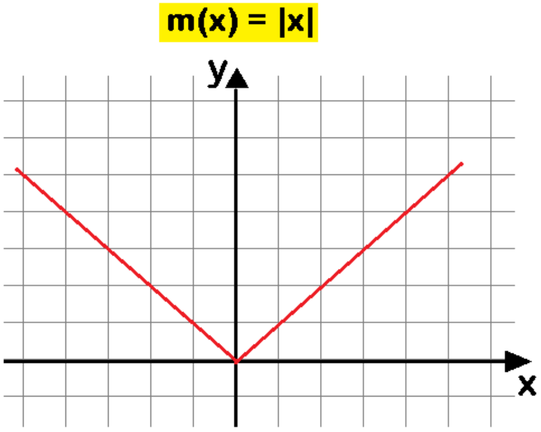
$$\left(\overline{PD}\right)^2 = 4 + x^2$$

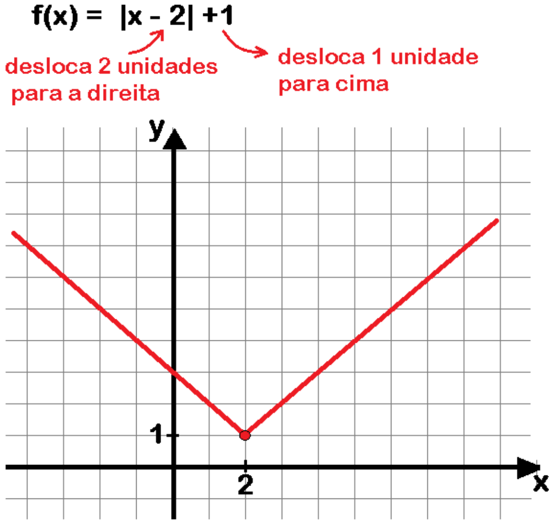
$$\overline{PD} = \sqrt{4 + x^2}$$

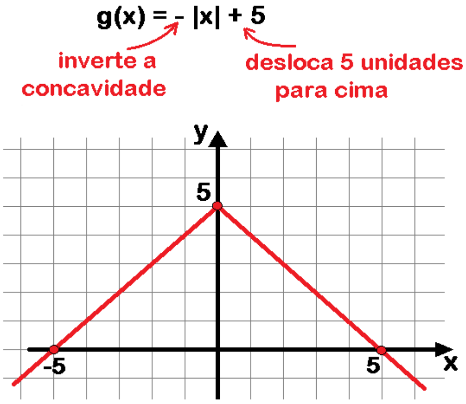
$$S(x) = (2 - x) + 2.\sqrt{4 + x^2} \quad (E)$$

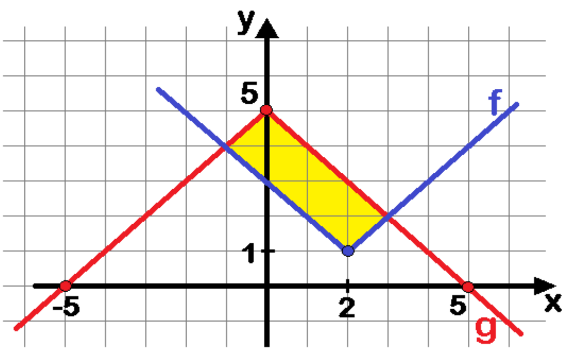
57)

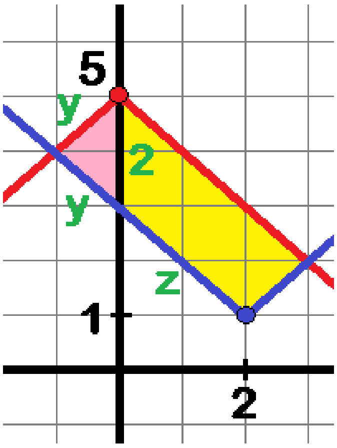
Os esboços dos gráficos das funções modulares serão construídos a partir dos deslocamentos da função modular elementar m(x) = |x|:











$$2^2 = y^2 + y^2$$
$$4 = 2y^2$$
$$2 = y^2 \quad y = \sqrt{2}$$

$$z^2 = 2^2 + 2^2$$
$$z^2 = 8 \quad z = \sqrt{8}$$
$$z = \sqrt{2^2.2} \quad z = 2\sqrt{2}$$

$$A = base \times altura$$
$$A = 3\sqrt{2}.\sqrt{2} \quad A = 3.2$$
$$A = 6 \qquad (B)$$

58)

I) $Homens \cong 130.000$

$$Mulheres \cong 145.000$$
$$Diferença = 145000 - 13000 = 15000$$
$$130.000 ----100\%$$
$$15.000 ------x$$
$$x = \frac{15000.100}{130000} = \frac{150}{13} = 11,5\% \quad (F)$$
$$A = 6 \qquad (B)$$

II) $Mulheres$

$30 - 39\ anos \qquad 60 - 69\ anos$

$\cong 170.000 \qquad \cong 75.000\ (100\%) \quad (F)$

III) $Acima\ de\ 80\ anos \qquad 70 - 79\ anos$

$mulheres = 30.000 \qquad mulheres \cong 38.000$

$\hom ens \cong 12.000 \qquad \hom ens = 32.000$

$\%\ de\ mulheres: \qquad \%\ de\ mulheres:$

$\frac{20.000}{32.000} = \frac{5}{8} \times 100 \cong 62\% \qquad \frac{38.000}{70.000} = \frac{19}{35} \times 100 \cong 57\%$

$\%\ \hom ens \cong 38\% \qquad \%\ \hom ens \cong 43\%$

59)

Média Aritmética Simples

$$\bar{x} = \frac{240+180+180+240+120}{5} = \frac{960}{5}$$

$$\bar{x} = 192 \text{ minutos} \qquad \bar{x} = 3\,horas\ e\ 12 \text{ minutos} \quad (A)$$

60)

$$10\ médicas.$$

$$P(E) = \frac{favoráveis}{total}$$

$$Total:$$

$$C_{10,4} = \frac{10!}{4!\,6!} = \frac{10.9.8.7.6!}{4!\,6!} = \frac{10.9.8.7}{4.3.2.1} = 10.3.7 = 210$$

$$Favoráveis: \quad \boxed{A}\,\boxed{F}\,\underbrace{\boxed{}\,\boxed{}}_{\text{Sobram 8 para escolher 2}}$$

$$C_{8,2} = \frac{8!}{2!\,6!} = \frac{8.7.6!}{2!\,6!} = \frac{8.7}{2} = 4.7 = 28$$

$$P(E) = \frac{favoráveis}{total} = \frac{28}{210} = \frac{4}{30} = \frac{2}{15} \quad (D)$$